



Cap. 4 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão
2009/2010



Análise de Decisão

- Análise de Decisão
 - Modelação
 - Critérios de Decisão
 - Não Probabilísticos
 - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Decisão Com Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*

Análise de Decisão - Modelação

1) Acções - $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

- Identificar e enumerar TODAS as Acções de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar acções
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
- **Objectivo** – escolher uma e uma só acção de A

2) Estados da Natureza - $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$

- Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
- Ocorre um e um só estado!
- O decisor só conhece o estado depois de escolhida a acção

Análise de Decisão - Exemplo


Exemplo Protótipo (livro, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

Table 15.1 summarizes these data. Section 15.2 discusses how to approach the decision of whether to drill or sell based just on these data. (We will refer to this as the *first Goferbroke Co. problem*.)

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.



Instituto Superior de Estatística e Gestão
de Informação da Universidade Nova de Lisboa

Análise de Decisão - Modelação

3) Função Ganho (Proveito)

- Avaliar as acções em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências


$p(a_i, \theta_k)$ ganho de tomar a acção $a_i \in A$ e o estado da natureza ser $\theta_k \in \Theta$ ($i=1, \dots, m; k=1, \dots, n$)

- Eliminar do estudo eventuais acções dominadas !

4) Critérios de Decisão

- Não Probabilísticos: **MAXIMIN**
- Probabilísticos: **Bayes**; Máxima Verosimilhança

SAD 2009/10 5




Instituto Superior de Estatística e Gestão
de Informação da Universidade Nova de Lisboa

Análise de Decisão

Problemas a responder

- Que acção escolher ?
- Qual o ganho esperado da acção escolhida ?
- Valerá a pena efectuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza ? Ou seja, será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma ?
- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para a eliminação da incerteza ?

SAD 2009/10 6



Decisão Sem Experiência


Critério de Decisão Não Probabilístico

Princípio de Decisão **MAXIMIN** (de Wald)

- Critério pessimista que considera que a natureza "é do contra"! O estado de natureza será o pior possível para a acção que o decisor escolher.
- Para cada acção e , tendo em conta que a natureza é adversa, identifica-se o ganho mínimo a que o decisor estará sujeito se a escolher. A acção **maximin** é então a que maximiza o ganho mínimo, ou seja, a acção correspondente a:

$$\text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{Min}_{1 \leq k \leq n} \{ p(a_i, \theta_k) \} \right\}$$

SAD 2009/10 7



Decisão Sem Experiência

Princípio de Decisão **MAXIMIN**

- Vantagens
 - Protege o decisor contra o "pior caso"
 - Garante um ganho mínimo
 - Não permite perdas disparatadas
- Adapta-se a situações de
 - Forte aversão ao risco
 - Concorrência agressiva
- Determinar a acção maximin para o exemplo protótipo

SAD 2009/10 8

Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente acção Maximin e comente o resultado.

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	100	80	-100
a_2	-80	-80	-80

R:


Decisão Sem Experiência

Crítério de Decisão Probabilístico

Princípio de Decisão Bayes

- A informação que o decisor tem sobre os estados da natureza pode ser traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori* – sendo o estado da natureza uma v.a.
- $h_\theta(k) = P[\theta = \theta_k]$: probabilidade *a priori* associada ao estado θ_k .
- Princípio de Bayes - escolher a acção que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a acção correspondente a:

$$\text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(q_i, \theta_k) \right\} = \text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ E[p(q_i, \theta)] \right\}$$



Decisão Sem Experiência


➤ Determinar a acção Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2
a_1	700	-100
a_2	90	90
$h_\theta(k)$		

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

SAD 2009/10 11





Decisão Com Experiência

- Valerá a pena recorrer a experimentação para diminuir a incerteza?
- O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** representa o valor que o decisor está disposto a pagar para retirar a incerteza do problema, ou seja, para ter a certeza absoluta sobre qual dos estados da natureza se irá observar.
- Seja \tilde{a} a acção Bayes (sem experiência), com ganho esperado $E[p(\tilde{a}, \theta)]$ e EP o ganho esperado com informação perfeita, então:

$$EVPI = EP - E[p(\tilde{a}, \theta)]$$

onde $EP = \sum_{k=1}^n h_\theta(k) \mathbb{E}[p(\tilde{a}^k, \theta_k)]$, e \tilde{a}^k representa a acção a escolher quando o estado da natureza é θ_k (acção com o ganho máximo associado para este estado da natureza).



SAD 2009/10 12

Decisão Com Experiência

- Se for realizada uma experiência para diminuir a incerteza, a acção a escolher deve ficar dependente do resultado obtido, necessitando o decisor de uma função de decisão que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência.
- Optando pela **função de decisão Bayes**, a acção é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado, calculado com as probabilidades revistas (*a posteriori*) de cada um dos possíveis resultados da experiência.

SAD 2009/10 13

Decisão Com Experiência - Exemplo

Exemplo Protótipo (continuação – pág. 680)


Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de *30 000 u.m.*

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: FSS (é provável a existência de petróleo) ou USS (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

Valerá a pena efectuar um teste sísmico?

SAD 2009/10 14




Decisão Com Experiência

Seja:

- S a v.a. que representa a informação adicional da experiência
- $h_{\theta}(k)$ as probabilidades *a priori*
- $Q_{S/\theta=\theta_k}(s) = P[S = s/\theta = \theta_k]$ a **função de verosimilhança** da experiência, ou seja, a credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta,S}(\theta_k, s) = P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]$ é a f.d. conjunta do par aleatório (θ, S)
- $P[S = s] = \sum_{k=1}^n P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]$ é a f.d. marginal da v.a. S

SAD 2009/10 15





Decisão Com Experiência

Método:

- 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P[\theta = \theta_k/S = s] = \frac{P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]}{\sum_{k=1}^n P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]}$$
 - As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.
- 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a acção Bayes
- 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de S e as acções Bayes para cada resultado possível.
 - Árvores de Decisão

SAD 2009/10 16



Árvores de Decisão

Usam-se quando:

- 1) Existem acções sequenciais no tempo (Experiências,...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

Árvore de Decisão - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** – escolha do caminho a seguir pertence ao decisor
- Nodos Causais** (ou Aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

Excel / TreePlan

SAD 2009/10 17